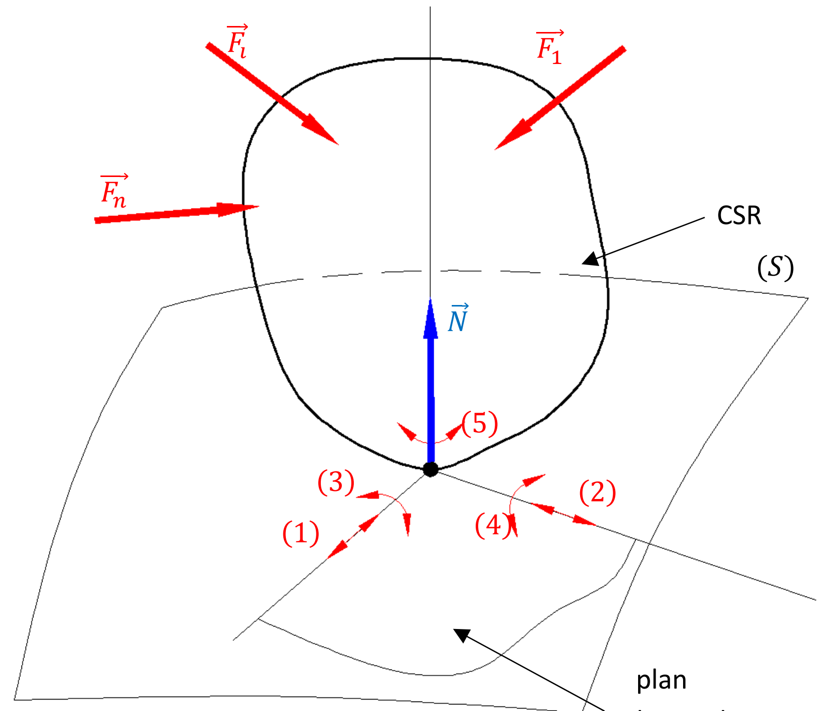
Curs 9

3.2 Corp solid rigid legat

3.2.1. Legături aplicate CSR

a) Reazemul simplu

Este legătura care obligă un punct al CSR sa rămână în contact cu o suprafață sau cu o curbă.



11

Figura 1 – Reazem simplu

Dacă solidul rigid se găsește pe o suprafață sau pe o curbă atunci este împiedicată deplasarea acestuia după direcția normalei la suprafața sau a normalei la curbă, dar este posibilă deplasarea acestuia în plan tangent la suprafața sau după direcția tangentei la curba și rotirea în jurul punctului considerat.

Astfel reazemul simplu suprimă corpului un grad de libertate, rămânând libere 5 grade de libertate.

Conform axiomei existentei forțelor de legătură, reazemul simplu este echivalent cu o reacțiune pe direcția deplasării suprimate (normalei).

Sensul recțiunii este sensul în care corpul poate părăsi reazemul, dacă acesta este unilateral sau oricare dacă este bilateral.

Observații

Reazemul simplu poate fi realizat și dacă legăm CSR de un punct fix din spațiu cu ajutorul unei tije (bară rigidă) numită pendul. Reacțiunea în acest caz apare pe direcția pendulului.

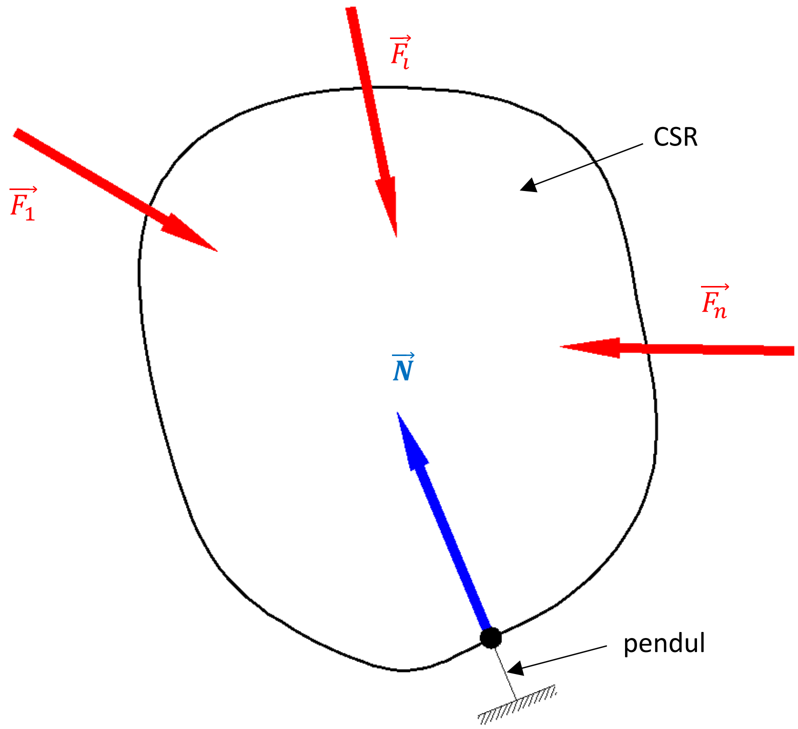


Figura 2 – Pendul (tijă rigidă)

Dacă punctul de contact dintre CSR și suprafața de reazem este un punct singular reacțiunea apare pe direcția normalei la corp.

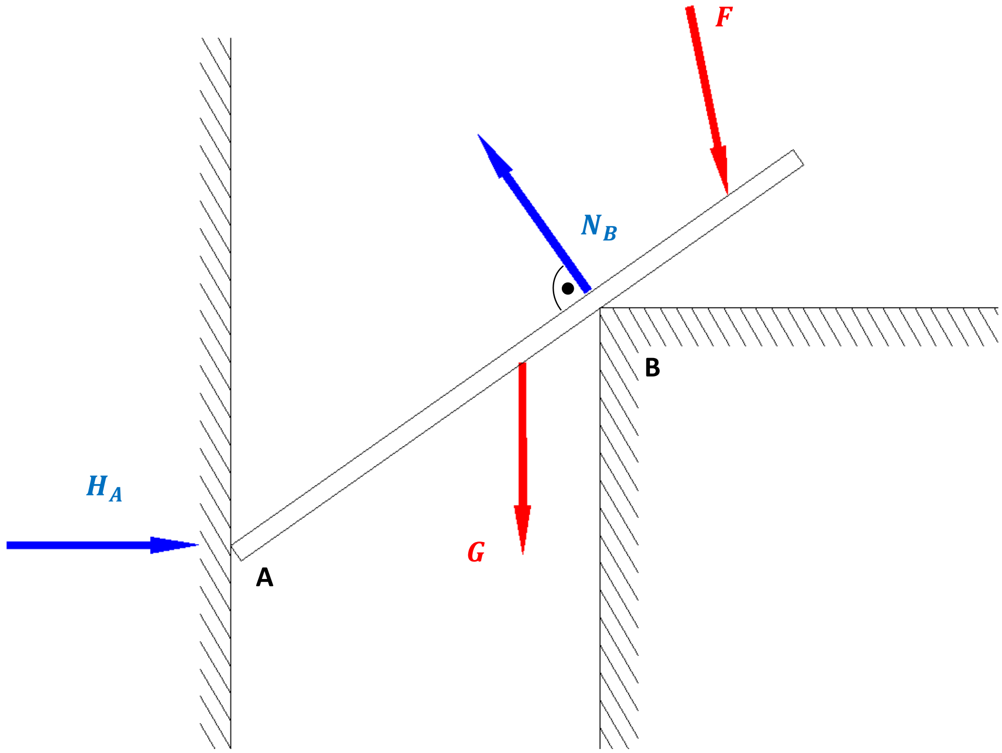


Figura 3 – Direcția reacțiunilor ce apar în cazul reazemului simplu (rezemări pe suprafețele de contact)

Reprezentarea convențională a reazemului simplu:

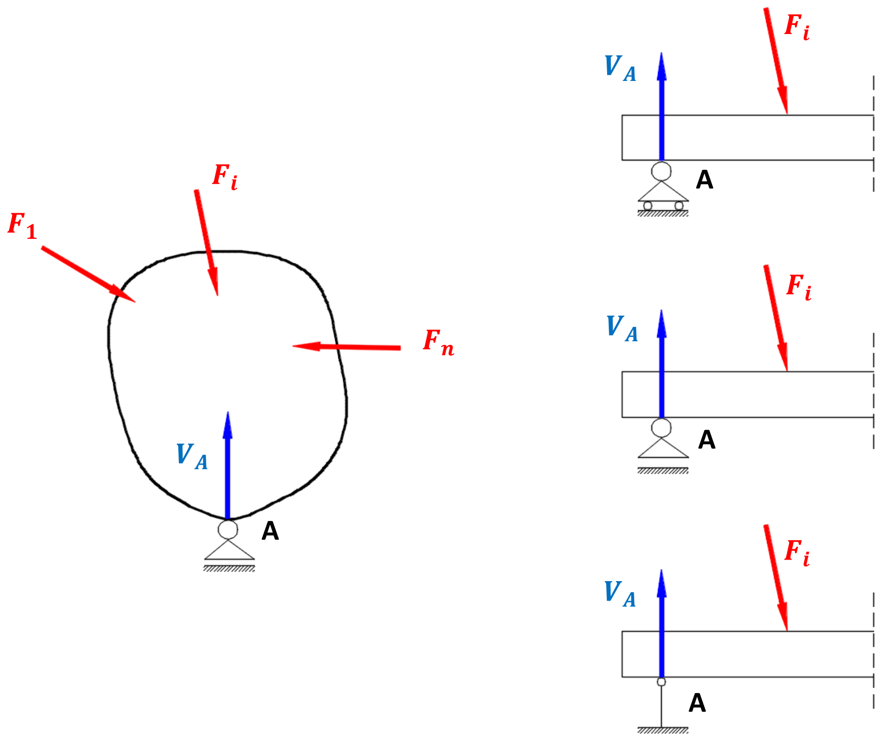


Figura 4 – Reazem simplu – reprezentarea convențională

b) Articulația

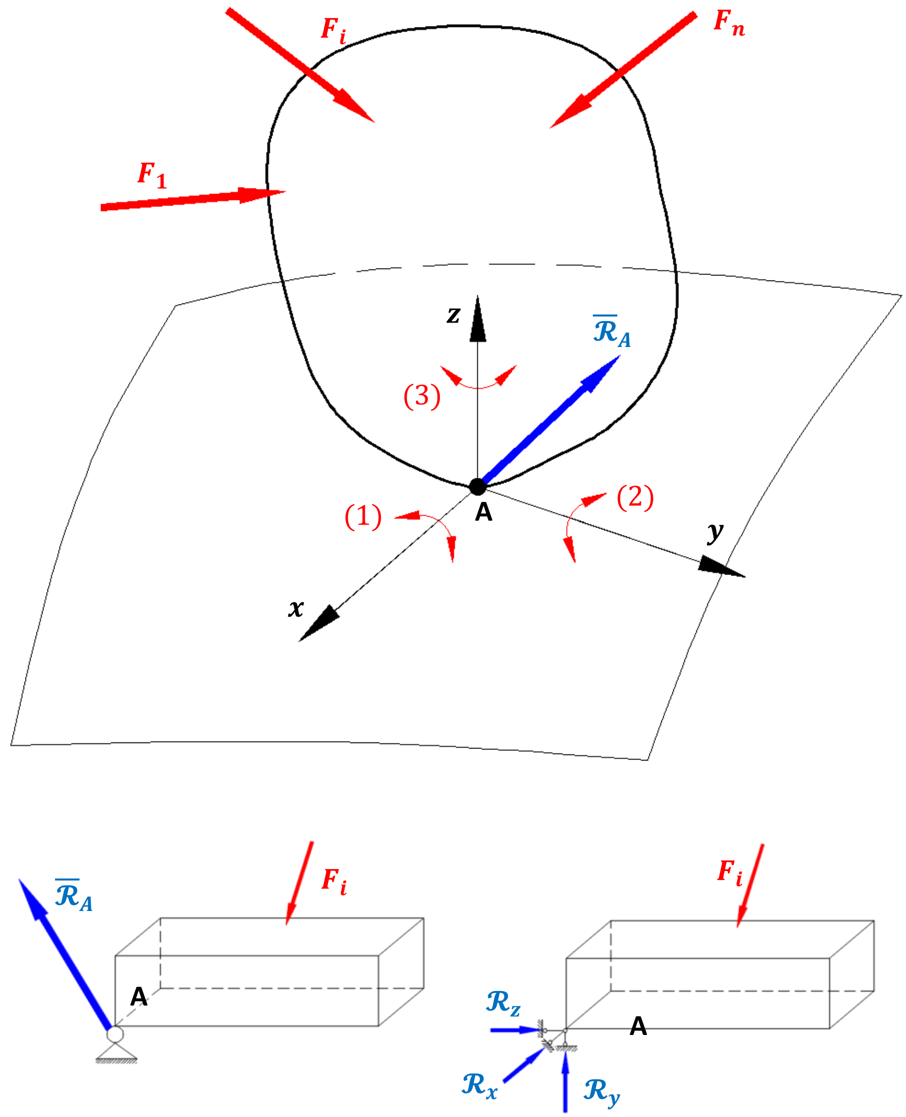


Figura 5 – Articulația sferică

Articulația este legătură care fixează un punct al unui solid pe o suprafață. Articulația poate fi:

- sferică: când sunt anulate solidului rigid 3 grade de libertate și anume deplasările pe direcțiile a trei axe ortogonale, lăsând posibile numai rotațiile acestuia în jurul acestor axe. Fiind suprimate deplasările pe trei direcții ortogonale ce trec prin punctul fix, este suprimată deplasarea pe orice direcție ce trece prin acest punct. În acest caz solidul este acționat de un sistem de forțe în spațiu (oarecare).

Reacțiunea care apare în articulație este o forță de mărime și direcție necunoscută.

Ea se poate descompune în componente pe direcțiile celor trei axe ortogonale.

Articulația sferică este echivalentă cu trei reazeme simple pe direcțiile celor trei axe ortogonale.

- **cilindrică:** dacă deplasarea pe direcția uneia din cele trei axe este posibilă articulația se numește cilindrică. Astfel sunt anulate două grade de libertate ale solidului și anume deplasările pe direcțiile celorlalte două axe. Gradele de libertate rămase sunt rotirile în jurul celor trei axe și deplasarea pe o axă. Reacțiunea este cuprinsă în planul axelor pe direcțiile cărora nu este permisă deplasarea.
Dacă CSR este acționat de sistem de forțe coplanare, articulația se numește articulație plană.
Articulația plană suprimă două grade de libertate ale CSR în plan și rămâne un grad de libertate și anume rotirea în jurul unei axe perpendiculare pe planul forțelor, axa care trece prin articulație.

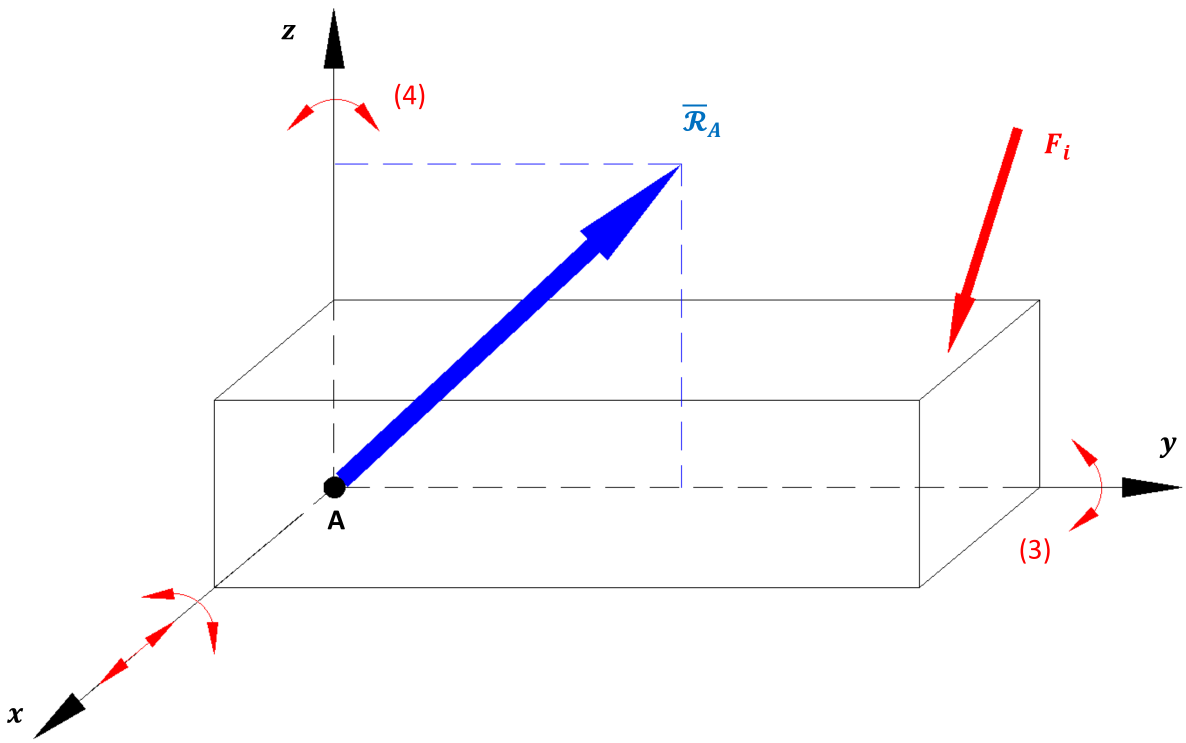


Figura 6 – Articulația cilindrică

- **plană** (planul xOy) - reprezentarea convențională

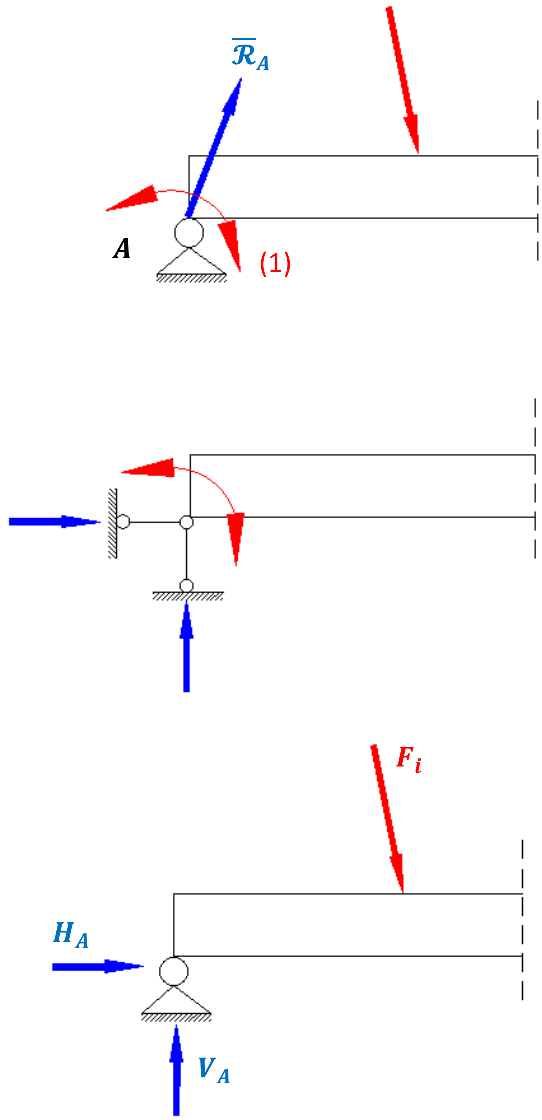


Figura 6 – Articulația plană

c) Încastrarea

Încastrarea este legătura care suprimă unui CSR toate gradele de libertate. Corpul nu mai are nici o posibilitate de mișcare.

- **Încastrarea spațială** fixează o secțiune a CSR. Corpul este acționat de un sistem de forțe oarecare. O secțiune a corpului definește poziția sa în spațiu. Dacă această secțiune este fixată rezultă că încastrarea spațială fixează CSR în spațiu. Fiecare punct al acestei secțiuni se comportă ca o articulație sferică în care iau naștere reacțiuni de mărime și direcție necunoscute. Efectuând reducerea acestor reacțiuni în centrul de greutate al secțiunii, obținem un vector rezultant $\vec{R}$ și un moment rezultant $\vec{M}$, care sunt reacțiunile în încastrare.

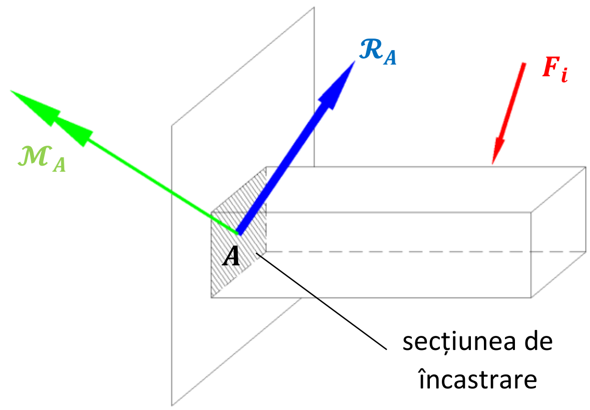


Figura 7 – Încastrarea spațială

- **Încastrarea plană** fixează CSR în planul forțelor. Corpul este acționat de un sistem de forțe coplanare. Încastrarea plană este echivalentă cu o reacțiune forță $\vec{R}$ aflată în planul forțelor și un moment reacțiune $\vec{M}$, care este perpendicular pe planul forțelor.

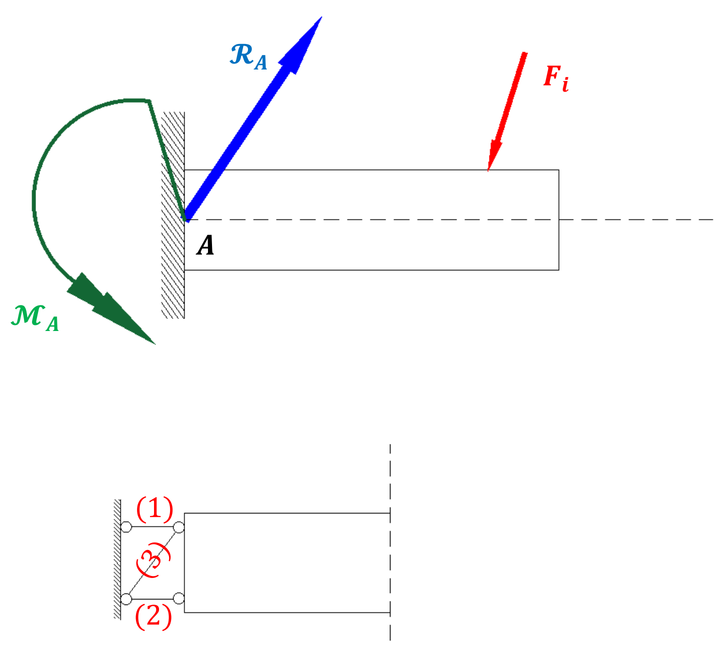
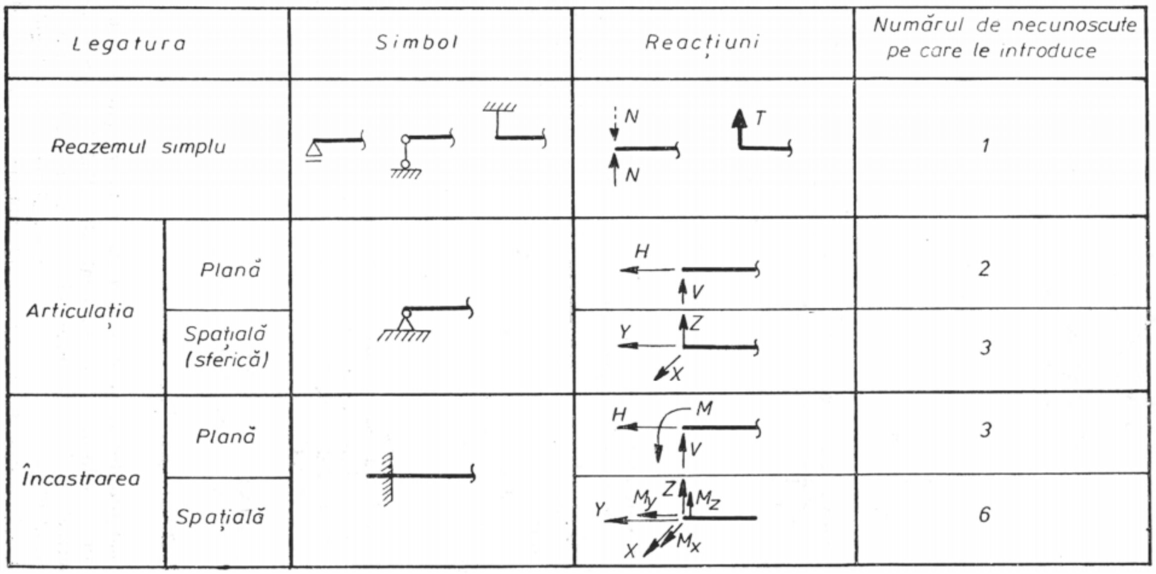


Figura 8 – Încastrarea plană

TIPURI DE LEGĂTURI ŞI REACȚIUNILE AFERENTE



Legatura		Simbol	Reacțiuni	Numărul de necunoscute pe care le introduce
Reazemul simplu			N, N, T	1
Articulația	Plană		H, V	2
	Spațială (sferică)		Y, Z, X	3
Încastrarea	Plană		H, M, V	3
	Spațială		Y, M_y, Z, M_z, X, M_x	6

Sursa:

https://www.ct.upt.ro/studenti/cursuri/ungureanu/Curs5_MC.pdf - pagina 22

Observații:

a) Bara încastrată la un capăt (consola)

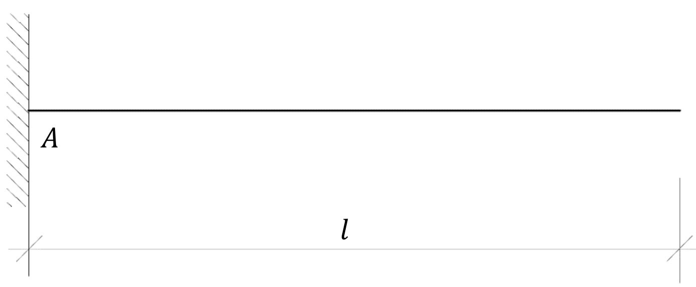


Figura 9 – Consola

b) Grinda simplu rezemată

Figura 10 – Grinda simplu rezemată

curs următor!

3.2.2 Problema fundamentală a staticii CSR legat:

Problema fundamentală a staticii CSR legat este următoarea**:**
Se dă corpul, sistemul de forțe care acționează pe el și legăturile la care este supus. Se cere să se determine parametrii care determină poziția (pozițiile) sa de echilibru și reacțiunile legăturilor.
Rezolvarea problemei fundamentale a staticii CSR legat:

- se determină numărul gradelor de libertate ale CSR. Dacă echilibrul corpului se stabilește în spațiu numărul GDL este $m = 6 - l$, iar dacă echilibrul corpului se stabilește în plan numărul GDL este $m = 3 - l$.

În care l este egal cu numărul gradelor de libertate suprimate de legături (vezi tabelul de mai sus, ultima coloană)

- se aplică axioma eliberării de legături, introducând pe corp reacțiunile corespunzătoare legăturilor sale. Astfel CSR se transformă într-un corp liber
- se aplică teorema fundamentală a staticii, rezultă astfel sistemul de ecuații vectoriale de echilibru:

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{F_i}) + \vec{R}(\vec{L}) = \vec{0} \\ \vec{M}_O(\vec{F_i}) + \vec{M}_O(\vec{L}) = \vec{0} \end{cases} \quad (1)$$

  În care
  $\vec{R}(\vec{F_i})$ este vectorul rezultant al sistemului forțelor exterioare $\{\vec{F_i}\}$ aplicate corpului ,
  $\vec{R}(\vec{L})$ este vectorul rezultant al sistemului forțelor de legătură $\{\vec{L}\}$ aplicate corpului ,
  $\vec{M}_O(\vec{F_i})$ este momentul rezultant al sistemului fortelor exterioare $\{\vec{F_i}\}$ aplicate corpului ,
  $\vec{M}_O(\vec{L})$ este momentul resultant al sistemului fortelor de legatura $\{\vec{L}\}$ aplicate corpului.
- Ecuațiile sistemului (1) se proiectează pe axele sistemului de referință triortogonal și se obțin ecuațiile scalare de echilibru în număr de 6, dacă

echilibrul corpului se stabilește în spațiu, și 3 dacă echilibrul corpului se stabilește în plan

- se rezolvă sistemul de ecuații scalare de echilibru, determinând necunoscutele problemei.

3.2.3 Fixarea corpului solid rigid

- **fixarea în spațiu**

Pentru a fixa CSR în spațiu trebuie să se suprime toate cele 6 GL prin aplicarea de legături. Sunt necesare un număr minim de 6 legături simple dispuse în minim 3 puncte necoliniare. Dacă legarea corpului este corectă , poziția de echilibru este determinată numai de legături și nu depinde de forțele aplicate . Legăturile trebuie astfel aplicate încât reacțiunile să poată echilibra orice sistem de forțe exterioare aplicate. CSR poate fi fixat astfel:

- printr-o încastrare spațială
- printr-o articulație sferică, o articulație cilindrică și un reazem simplu
- printr-o articulație sferică și 3 reazeme simple
- prin trei articulații cilindrice
- prin două articulații cilindrice și două reazeme simple
- printr - o articulație cilindrică și 4 reazeme simple
- prin 6 reazeme simple (penduli)

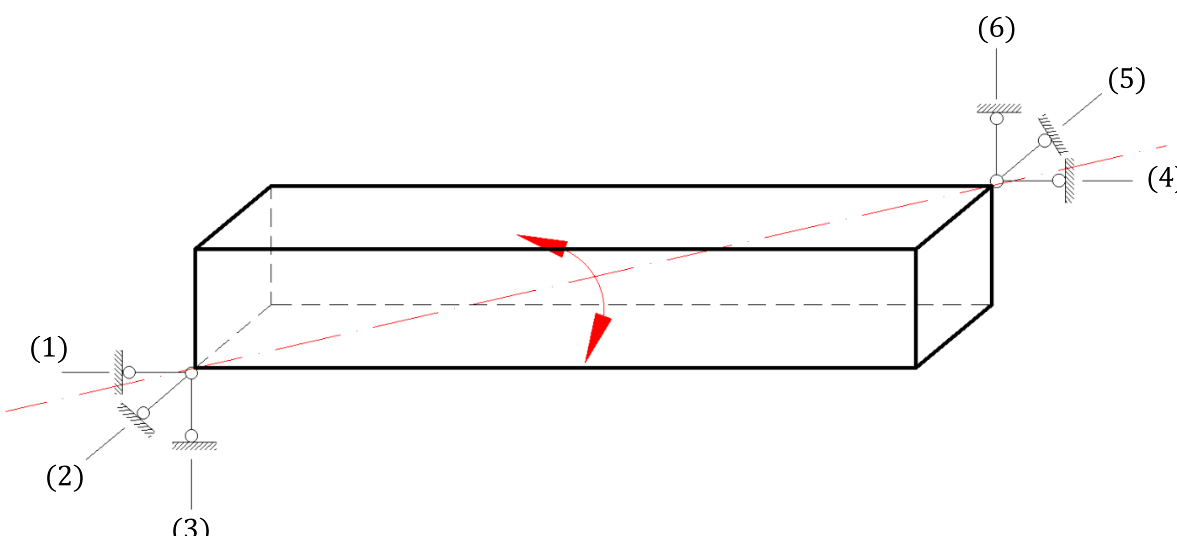


Figura 11 – Dispunerea incorectă a legăturilor

Din scrierea ecuațiilor de echilibru rezultă un sistem de 6 ecuații liniare de forma:

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ (2)

În ecuația matriceală (2) avem:

$\boldsymbol{N}$ este vectorul mărimilor reacțiunilor

$\boldsymbol{F}$ este vectorul mărimilor forțelor exterioare

Matricea $\boldsymbol{A}$ depinde de dispunerea legăturilor.

Dacă legăturile sunt corect dispuse, mărimile reacțiunilor depind numai de forțele exterioare.

Sistemul de ecuații (2) este compatibil determinat, deci are soluție unică.

Un mod de a verifica dacă CSR este corect fixat este de a calcula determinantul matricei A. dacă $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ legaturile sunt corect dispuse pentru a-l fixa, în caz contrar legăturile nu sunt corect dispuse pentru a-l fixa.

- **fixarea în plan**

Pentru a fixa CSR în plan trebuie să se suprime toate cele 3 GL prin aplicarea de legături. Sunt necesare un număr minim de 3 legături simple dispuse în minim 2 puncte. Dacă legarea corpului este corectă , poziția de echilibru este determinată numai de legături și nu depinde de forțele aplicate . Legăturile trebuie astfel aplicate încât reacțiunile să poată echilibra orice sistem de forțe exterioare aplicate. CSR poate fi fixat astfel:

- printr-o încastrare plană
- printr-o articulație plană și un reazem simplu
- prin 3 reazeme simple (penduli)

- Fixarea prin 3 penduli

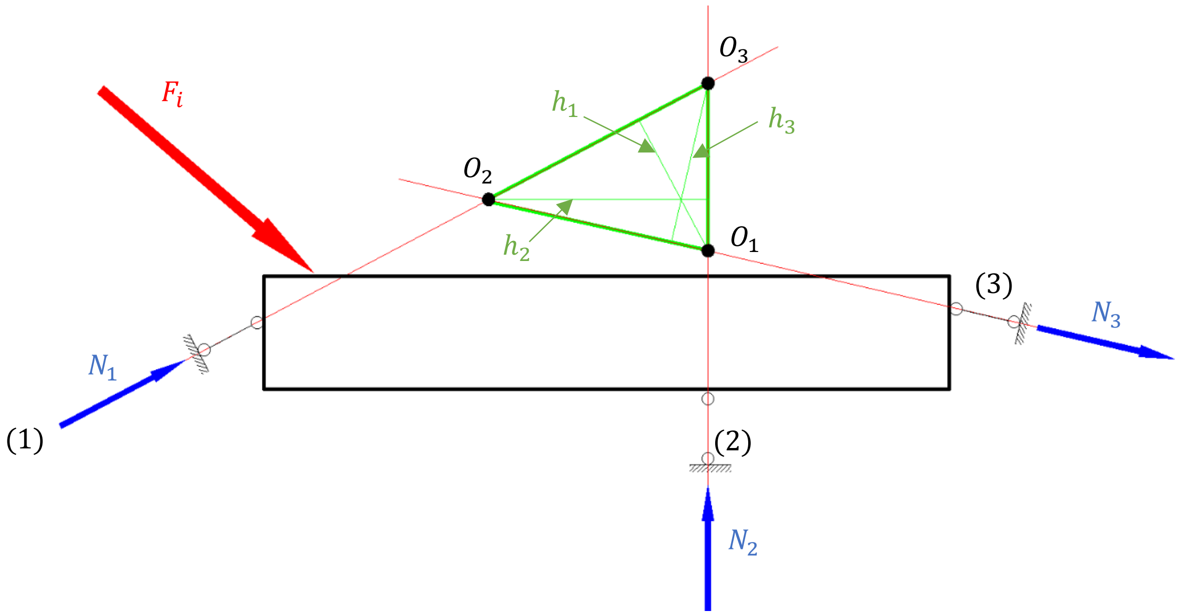


Figura 12 – Fixarea CSR în plan

Considerăm situația din Fig. 12 în care direcțiile pendulilor sunt (1),(2),(3) și determină triunghiul $O_1O_2O_3$. Scriem ecuațiile de echilibru în raport cu punctele O_1 ,O_2 ,O_3:

$$h_1\, N_1 + \sum_{i=1}^{n} M_{O1}(\vec{F_i}) = 0$$

$$h_2\, N_2 + \sum_{i=1}^{n} M_{O2}(\vec{F_i}) = 0$$

$$h_3\, N_3 + \sum_{i=1}^{n} M_{O3}(\vec{F_i}) = 0$$

În care h_1 , h_2 , h_3 sunt brațele reacțiunilor N_1, N_2, N_3.

În acest caz matricea A este:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

Det (A) = $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \neq 0$

Legăturile sunt corect dispuse.

Dacă direcțiile celor trei penduli sunt concurente, ei nu fixează corpul, acesta are posibilitatea de a se roti în jurul punctului de concurență în acest caz.

Det (A) =0

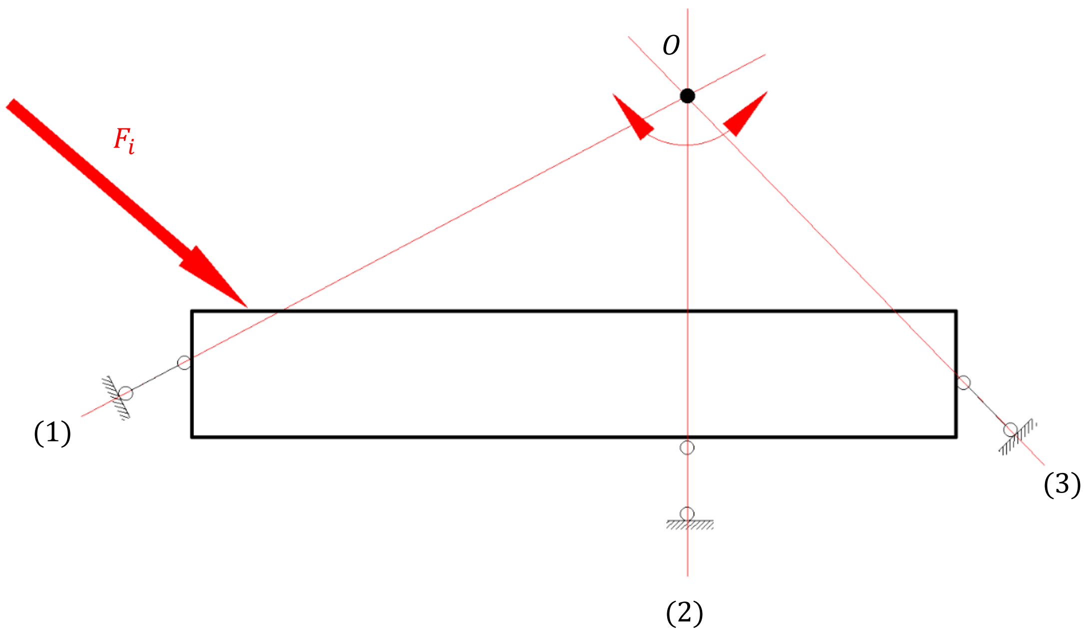


Figura 13 – Dispunerea incorectă a legăturilor – direcțiile pendulilor sunt concurente

- Fixarea prin intermediul a doi penduli paraleli și un alt treilea dispus după o direcție oarecare

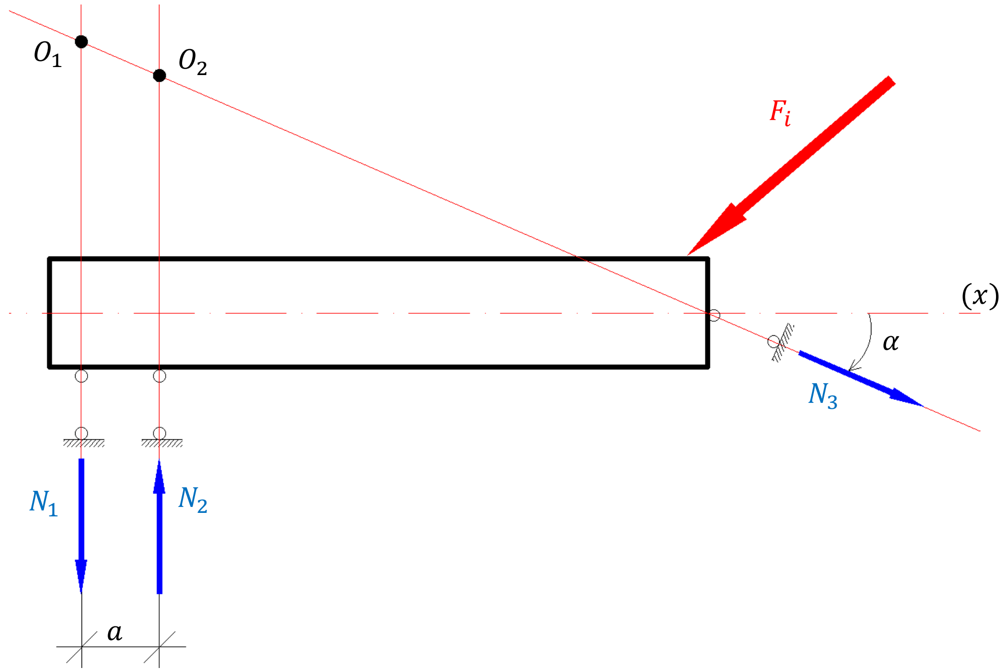


Figura 14 – Fixarea prin intermediul a 3 penduli din care 2 au direcții paralele

$$\begin{cases} \sum M_{0_2} = 0 \\ \sum M_{0_1} = 0 \\ \sum X_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot N_1 + \sum M_{0_1}(F_i) = 0 \\ a \cdot N_2 + \sum M_{0_2}(F_i) = 0 \\ N_3 \cdot \cos\alpha + \sum X_i(F_i) = 0 \end{cases}$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ fiind:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{iar } \det \boldsymbol{A} = a^2 \cdot \cos\alpha.$$

Pentru ca determinatul $\det \boldsymbol{A}$ să fie nenul avem două condiții:

a) Pendulii sa nu fie confundați $a \neq 0$
b) al treilea pendul să nu fie paralel cu ceilalți doi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

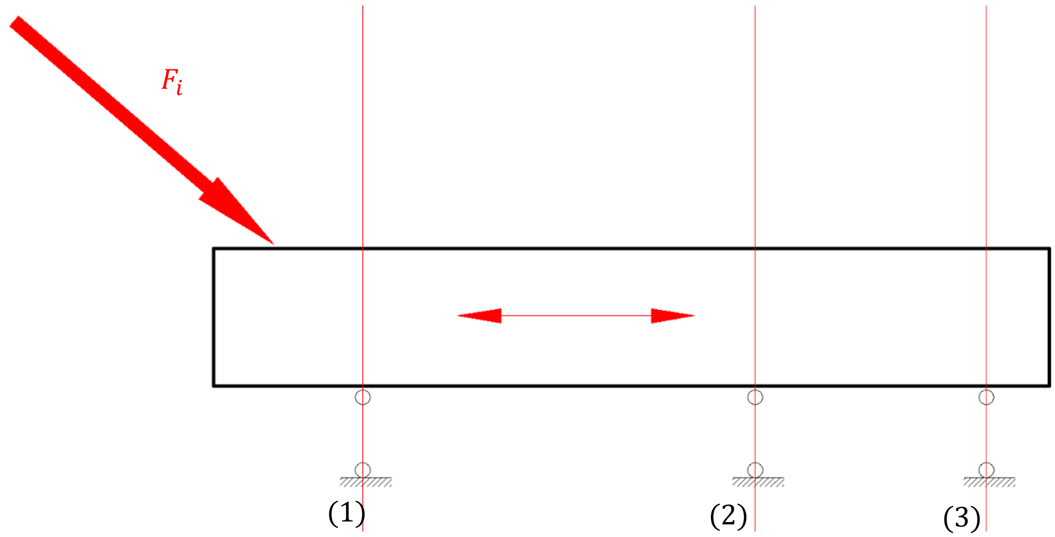


Figura 15 – Dispunerea incorectă a legăturilor –
directiile pendulilor sunt paralele

O dispunere a celor trei penduli paraleli nu este corectă deoarece corpul se poate mișca pe direcție orizontală (mișcare de translație).

- Fixarea prin intermediul a unei articulații și a unui reazem simplu

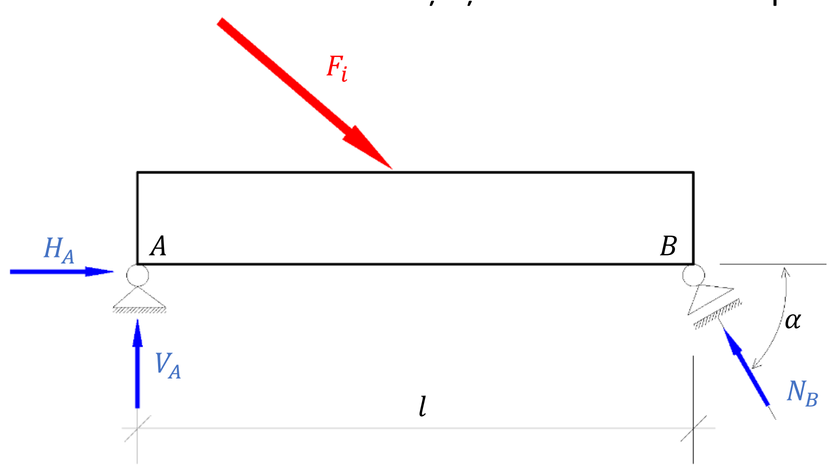


Figura 16 – Fixarea prin intermediul unei articulații și a unui reazem simplu

Se scriu ecuațiile de echilibru astfel:

$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum X_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -l \cdot V_A + \sum M_B(F_i) = 0 \\ l \cdot N_B \sin\alpha + \sum M_A(F_i) = 0 \\ H_A - N_B \cos\alpha + \sum X_i(F_i) = 0 \end{cases}$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ fiind:

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -l & 0 & 0 \\ 0 & l\sin\alpha & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$ iar $\det \boldsymbol{A} = -l^2 \cdot \sin\alpha$.

Pentru a fixa CSR, $\det A \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0 \ \rightarrow \alpha \neq 0$:

Figura 17 – Dispunerea incorectă a legăturilor pentru grinda simplu rezemată

- Fixarea prin intermediul a unei încastrări (consola)

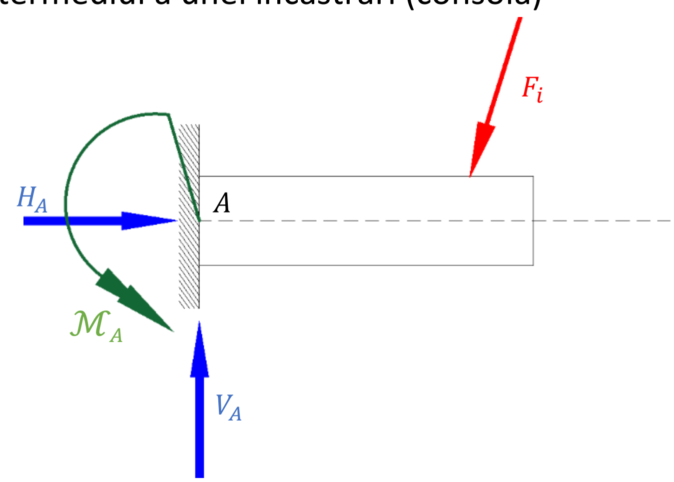


Figura 18 – Consola

Se scriu ecuațiile de echilibru astfel:

$$\begin{cases}\sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum M_A = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A + \sum X_i(F_i) = 0 \\ V_A + \sum Y_i(F_i) = 0 \\ \mathcal{M}_A + \sum M_A(F_i) = 0\end{cases}$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ fiind:

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iar $\det \boldsymbol{A} = 1 \neq 0$ 😊.

Sisteme critice

Dacă $\det \boldsymbol{A} = 0$ rezultă că legăturile sunt incorect dispuse. Adică corpul se poate deplasa (translații sau rotiri). Aici putem să avem două cazuri:

- în poziția deplasată corpul nu este în echilibru, $\det A = 0$,
- în poziția deplasată (în vecinătatea poziției inițiale) CSR își găsește poziția de echilibru (datorită configurației legăturilor), adică $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ dar $\det \boldsymbol{A} \cong 0$. Altfel spus, solidul sub acțiunea forțelor exterioare F_i înregistrează mici deplasări (infinitezimale), după care devine fixat. Se observă că valorile reacțiunilor în aceste cazuri sunt foarte mari în comparație cu restul reacțiunilor (vezi Fig. 17).

3.2.4 Fixarea punctului în plan

Punctul în plan are 2 GDL – translații după axele 0x și 0y. Deci, avem nevoie de 2 legături simple pentru a fixa punctul în plan. În spațiu avem nevoie de 3 legături simple (caz netratat în prezenta lucrare).

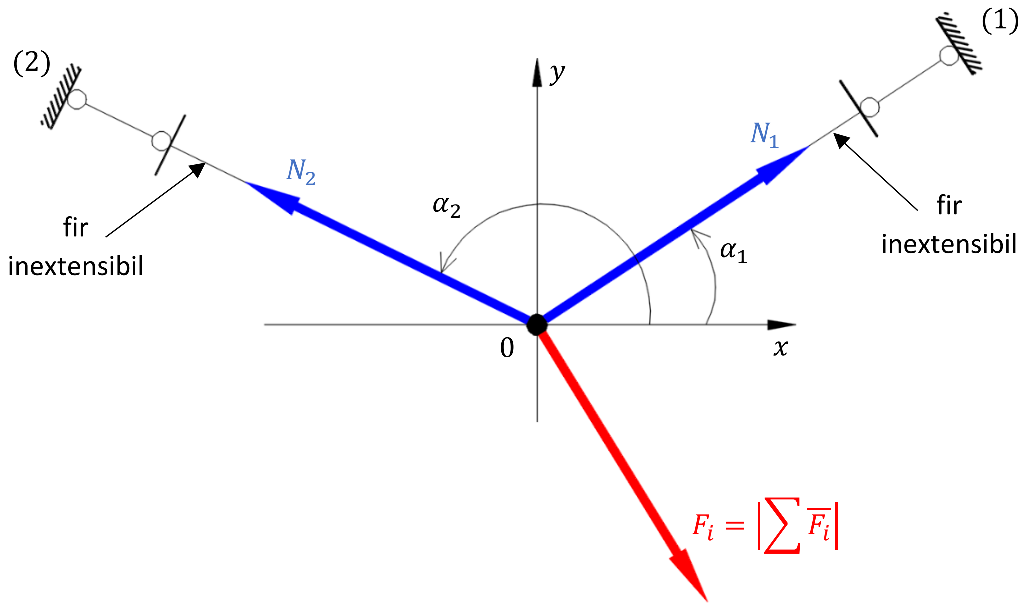


Figura 19 – Fixarea punctului în plan

Ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2 + \sum X_i(F_i) = 0 \\ N_1 \sin\alpha_1 + N_2 \sin\alpha_2 + \sum Y_i(F_i) = 0 \end{cases}$$

Determinatul sistemului fiind:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Adică

$$\sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \neq 0,$$

$$\sin(\,\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0,$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \neq k \cdot \pi.$$

Ceea ce ne conduce la restricțiile ca direcțiile firelor (1) și (2) să nu fie suprapuse.

Sistem critic:

Dacă cele două fire sunt în prelungire unul față de celălalt iar rezultanta forțele exterioare F_i este verticală (putem să o considerăm greutatea punctului O):

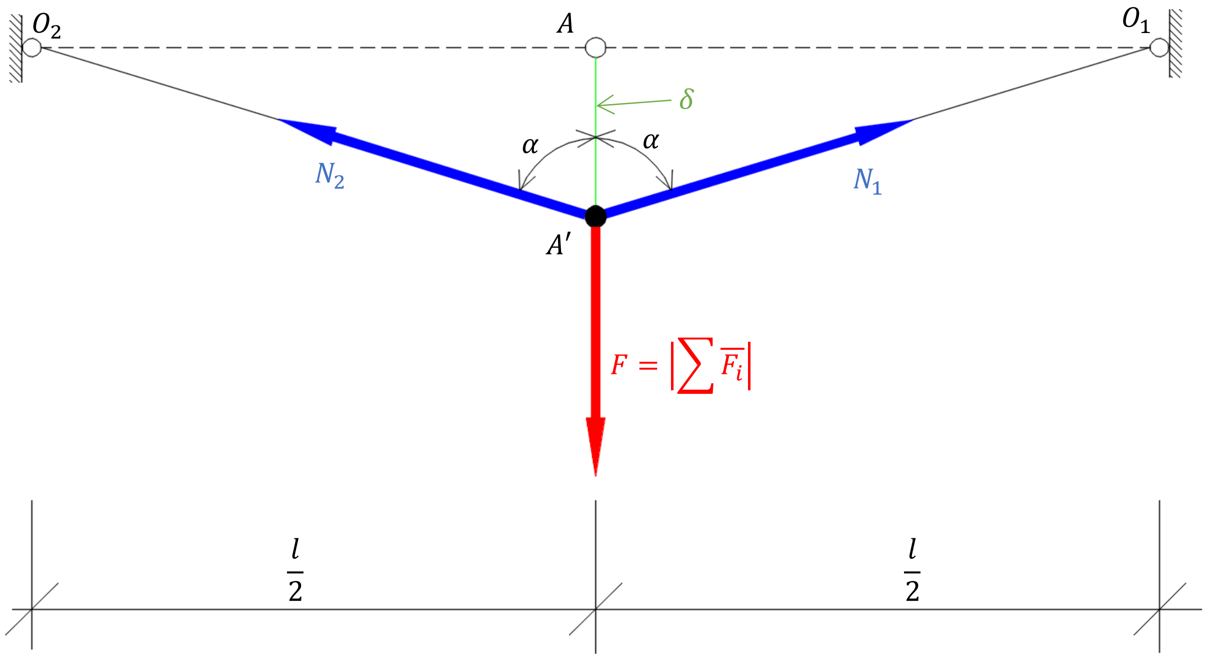


Figura 20 – Sistem critic la fixarea punctului în plan

Dacă scriem doar ecuația de echilibru a forțelor pe orizontală (componentele orizontale ale forțelor), rezultă că $N_1 = N_2 = N$ iar pe verticală o să avem ecuația de echilibru:

$$2N\cos\alpha - F = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; N = \frac{F}{2\cos\alpha}.$$

Cum $\cos\alpha \cong 0,\;\; \alpha \cong \frac{\pi}{2}$, rezultă că $N \to \infty$.